1. Distribución uniforme

<u>Definición</u>: Si $\theta_1 < \theta_2$, se dice que una variable aleatoria Y tiene una distribución de probabilidades uniforme continua en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ si y solo si tiene por función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} & , \quad \theta_1 \leq y \leq \theta_2 \\ 0 & , \quad \text{en otro punto} \end{cases}$$

<u>Definición</u>: Las constantes que determinan la forma específica de una función de densidad se conocen como parámetros de la función de densidad.

<u>Teorema</u>: Si $\theta_1 < \theta_2$ y Y es una variable aleatoria distibuida uniformemente en el intervalo (θ_1, θ_2), entonces

$$\mu = E[Y] = \tfrac{\theta_1+\theta_2}{2} \text{ y } \sigma^2 = V(Y) = \tfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}.$$

<u>Demostración</u>.
Como Y tiene distribución uniforme, entonces

$$E[Y] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right) dy = \left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

Por teorema sabemos que $V(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2$, luego

$$E[Y^2] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y^2\left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right) dy = \left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right)\left(\frac{\theta_2^3 - \theta_1^3}{3}\right) = \frac{\theta_2^2 + \theta_2\theta_1 + \theta_1^2}{3}$$

Por lo tanto

$$V(Y) = \frac{\theta_2^2 + \theta_2\theta_1 + \theta_1^2}{3} - \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^2 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$$

<u>Ejemplo</u>. El tiempo que tardan en ir y volver unos camiones se distribuye uniformemente en el intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo del viaje redondo rebase los 65 minutos si se sabe que hacerlo toma mas de 55 minutos? ¿Cuál es la media y la varianza del tiempo que se tardan los camiones en ir y volver?

<u>Solución</u>.
Sabemos que $Y \sim \text{Unif}(50, 70)$, queremos $P(Y > 65|Y > 55)$.

Por la fórmula de probabilidad condicional sabemos que:

$$P(Y > 65|Y > 55) = \frac{P(Y > 65 \cap Y > 55)}{P(Y > 55)} = \frac{P(Y > 65)}{P(Y > 55)} = \frac{\int_{65}^{70}\left(\frac{1}{70-50}\right) dy}{\int_{55}^{70}\left(\frac{1}{70-50}\right) dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{20}\left[y\right]_{65}^{70}}{\frac{1}{20}\left[y\right]_{55}^{70}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Por otro lado, usando las fórmulas demostradas para la media y la varianza tenemos que:

$$\mu = \frac{70+50}{2} = 60.$$

y

$$\sigma^2 = \frac{(70-50)^2}{12} = \frac{100}{3}.$$